

Math 151 Final Sınavı  
Ali Nesin  
19 Ocak 2006

1. Bütün  $x, y \in X$  elemanları için  $d(x, y) > \alpha$  eşitsizliğinin sağlandığı bir  $\alpha > 0$  varsa, o zaman  $(X, d)$  metrik uzaya **ayrık** denir.

1a. Herhangi sonlu bir metrik uzayın ayrık olduğunu gösteriniz.

1b. Sonsuz bir ayrık metrik uzay örneği veriniz.

1c. Ayrık bir metrik uzay içerisindeki herhangi bir Cauchy dizisinin zamanla sabitleştiğini gösteriniz.

1d. Ayrık bir metrik uzaydaki herhangi bir cauchy dizisinin limiti olduğunu gösteriniz.

2.  $\mathbb{R}$ 'yi doğal metrik uzay yapısıyla alınız.

a)  $s > -1$  ise bütün doğal sayı  $n$ 'ler için,  $(1 + s)^n \geq 1 + ns$  olduğunu gösteriniz.

b)  $r \in (-1, 1)$  ise  $(r^n)_n$  dizisinin 0'a yakınsadığını gösteriniz.

c)  $r \notin (-1, 1]$  ise  $(r^n)_n$  dizisinin ıraksadığını gösteriniz.

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)^n$  nedir?

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2 + 1/n)^n$  nedir?

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 - n} - n \right)$  nedir?

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{n^2-5} \right)^{\frac{n-1}{3n+5}}$  nedir?

5.  $a, b > 0$  ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{1/n} = \max\{a, b\}$  eşitliğini gösteriniz.

6.  $(x_n)_n$  reel sayılardan oluşan yakınsak bir dizi olsun.  $y_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

var olduğunu ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 'ye eşit olduğunu gösteriniz.

7.  $x_1 = 1, x_2 = 2$  ve  $n > 2$  için  $x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2$  olsun.

a. Bütün  $n$ 'ler için  $1 \leq x_n \leq 2$  olduğunu gösteriniz.

b. Bütün  $n$ 'ler için  $|x_n - x_{n+1}| = 1/2^{n-1}$  olduğunu gösteriniz.

c.  $m > n$  ise bütün  $n$ 'ler için  $x_n - x_m < 1/2^{n-2}$  olduğunu gösteriniz.

d.  $(x_n)_n$  dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 'yi bulunuz.

8. Bütün  $n$ 'ler için  $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$  eşitsizliğinin sağlandığı bir  $c, 0 < c < 1$  varsa  $(x_n)_n$  dizisine **büzülen** denir. Bütün büzülen dizilerin yakınsadığını gösteriniz.

9.  $x_n = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2$  olsun.

a. Bütün  $n \geq 1$  doğal sayıları için,  $x_n \leq 2 - 1/n$  olduğunu gösteriniz.

b.  $(x_n)_n$  dizisinin yakınsadığı sonucunu çıkarınız.

c. Yeterince büyük  $n$ 'ler için,  $n^2 \leq 2^n$  olduğunu gösteriniz.

d.  $(x_n)_n$  dizisinin yukarıdan  $1 + 1/4 + 1/9 + 1/8 = 107/72$  ile sınırlı olduğu sonucunu çıkarınız.

10. Bir doğal sayı  $n$  için  $v(n)$ 'yi,  $\max\{m : 2^m < n\}$  olarak tanımla.  $\lim_{n \rightarrow \infty} v(n)/n = 0$  olduğunu gösteriniz.